

① الگوریتم تیلور از مرتبه  $K$  (جایزه قبل)

② روش اولر:

اگر در الگوریتم تیلور قرار دهید  $K=1$ ، فرمول زیر محاسبه می شود:

که فرمول روش اولر می نامیم  $\leftarrow y_{i+1} = y_i + h f(x_i, y_i)$

مثال تقریبی از  $y(1.5)$  را برای معادله ی زیر به روش اولر با  $h=0.1$  محاسبه

کنید؟

$$\begin{cases} y' = x + y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$$x_i = x_0 + ih \rightarrow x_i = (i) \cdot 0.1$$

$$x_0 = 0 \rightarrow x_1 = 0.1 \rightarrow x_2 = 0.2$$

$$x_3 = 0.3 \rightarrow x_4 = 0.4 \rightarrow x_5 = 0.5$$

$$y_{i+1} = y_i + h f(x_i, y_i) = y_i + 0.1 x_i + 0.1 y_i = 0.1 x_i + 1.1 y_i$$

$$i=0 \rightarrow y_1 = 0.1 x_0 + 1.1 y_0 = 1.1$$

$$i=1 \rightarrow y_2 = 0.1 x_1 + 1.1 y_1 = 0.1 + 1.21 = 1.31$$

$$i=2 \rightarrow y_3 = 0.1 x_2 + 1.1 y_2 = 0.2 + 1.452 = 1.652$$

$$i=3 \rightarrow y_4 = 0.1 x_3 + 1.1 y_3 = 0.3 + 1.8962 = 2.1962$$

$$i=4 \rightarrow y_5 = 0.1 x_4 + 1.1 y_4 = 0.4 + 2.48582 = 2.88582 \rightarrow y(1.5) = y(x_5) = 2.88582$$

جواب نهایی

③ روش رونگه-کوتا:

- روش رونگه-کوتا (رتبه دوم): با داشتن  $h$  و  $x_i = x_0 + ih$  فرمول روش را

$$K_1 = h f(x_i, y_i)$$

بصورت زیر بیان می کنیم:

$$K_2 = h f(\underbrace{x_i + h}_x, \underbrace{y_i + K_1}_y)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{r} (k_1 + k_r)$$

مثال: تقریبی از  $y(0.2)$  بدست آورید و گام دایره باسیم:

$$\begin{cases} y' = x + y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

از روش رونده کوکای مرتبی دوم استفاده کنید و قرار دهید  $h = 0.1$ :

$$f(x_i, y_i) = x_i + y_i$$

$$x_i = x_0 + ih \rightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = 0.1 \\ x_2 = 0.2 \end{cases}$$

$$k_1 = 0.1 (x_i + y_i)$$

$$k_r = 0.1 f(x_i + 0.1, y_i + k_1)$$

$$y(0.2 = x_2) = y_2 = ?$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{r} (k_1 + k_r)$$

$$i=0 \Rightarrow$$

$$k_1 = 0.1 (\overset{0}{x_0} + \overset{1}{y_0}) = 0.1$$

$$k_r = 0.1 f(\overset{0}{x_0} + \overset{0.1}{0.1}, \overset{1}{y_0} + \overset{0.1}{k_1}) = 0.1 f(\overset{0.1}{0.1}, \overset{1.1}{1.1}) = 0.12$$

$$y_1 = \overset{1}{y_0} + \frac{1}{r} (\overset{0.1}{k_1} + \overset{0.12}{k_r}) = 1 + 0.11 = 1.11$$

$$i=1 \Rightarrow$$

$$k_1 = 0.1 (\overset{0.1}{x_1} + \overset{1.11}{y_1}) = 0.121$$

$$k_r = 0.1 f(\overset{0.1}{x_1} + \overset{0.1}{0.1}, \overset{1.11}{y_1} + \overset{0.121}{k_1}) = 0.1 f(\overset{0.2}{0.2}, \overset{1.231}{1.231}) = 0.1431$$

$$y_2 = y_1 + \frac{1}{r} (\overset{0.121}{k_1} + \overset{0.1431}{k_r}) = 1.11 + \frac{1}{r} (0.121 + 0.1431) = 1.2425$$

روش رونده کوکای مرتبه چهارم:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{r} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = h f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = h f(x_i + \frac{h}{r}, y_i + \frac{k_1}{r})$$

$$k_3 = h f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2})$$

$$k_4 = h f(x_i + h, y_i + k_3)$$

**مثال** تقریب از  $y(1)$  برای معادله دیفرانسیل برای

$$\begin{cases} y' = x + y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$h = 0.1$  با استفاده از روش رونگه کوتمای درستی چهارم

حاسب کنید؟  $x_i = x_0 + ih \rightarrow x_i = 0.1i \rightarrow x_0 = 0$

$$x_1 = 0.1 \rightarrow y(x_1 = 0.1) = y_1 = ?$$

$$i=0 \rightarrow y_1 = y_0 + \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$= 1 + \frac{1}{6} (0.1 + 2(0.11) + 2(0.1105) + 0.12105) = 1.11034$$

$$k_1 = 0.1 f(x_0, y_0) = 0.1 (0 + 1) = 0.1$$

$$k_2 = 0.1 f(x_0 + \frac{0.1}{2}, y_0 + \frac{0.1}{2}) = 0.1 f(0.05, 1.05) = 0.11$$

$$k_3 = 0.1 f(x_0 + \frac{0.1}{2}, y_0 + \frac{0.11}{2}) = 0.1 f(0.05, 1.055) = 0.1105$$

$$k_4 = 0.1 f(x_0 + 0.1, y_0 + 0.1105) = 0.1 f(0.1, 1.1105) = 0.12105$$

**تمرین** به روش اولتر تقریب از جواب را برای  $y(2)$  به ازای  $h = 0.5$  برای معادله

$$y' = 1 - \frac{y}{x} \quad \text{و} \quad y(1) = 2$$

**تمرین** فرض کنید  $y' = 1 - y$  و  $y(0) = 0$  و  $h = 0.5$ ، تقریب از

$y(1.05)$  را به روش رونگه کوتمای درستی دوم بگیرید؟

**تمرین** فرض کنید  $y' = 1 - y^2$  و  $y(0) = 0$  و  $h = 0.1$  تقریب از  $y(0.1)$  را به روش رونگه کوتمای درستی چهارم بگیرید؟